

TRIGONOMETRÍA

En los ejercicios siguientes no puede usarse la calculadora

- Hallar razonadamente las razones trigonométricas del ángulo de 2655° .
- Hallar todos los números reales, x , tales que $\cos x = \cos 20^\circ$.
- Calcula el seno, coseno y tangente de un ángulo del tercer cuadrante del que se sabe que su cosecante es igual a -2 .
- Calcula $\arcsen(0'5)$, $\arcsen(-1)$, $\arcsen(-\sqrt{3})$, $\arccos(0'5)$, $\arccos(-0'5)$, $\arccos(2)$, $\arctg(-1)$, $\arctg(-\sqrt{3})$.
- Calcula razonadamente:

a) $\arcsen\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$	b) $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$	c) $\arccos\left(\sen\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$	d) $\cos\left(2\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
e) $\cos(\arctg(-4))$	f) $tg\left(2\arctg(\sqrt{2})\right)$	g) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos(-0'2)\right)$	

- Resuelve las ecuaciones siguientes:
 - $4 \arctg(x^2-3x-3) = \pi$
 - $4 \arctg(x^2-3x-3) = 3\pi$
- Demostrar que para todo número real, x , perteneciente al intervalo cerrado $[-1,1]$ se cumple la siguiente igualdad: $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$.
- Halla las razones trigonométricas de los ángulos de 105° , 15° , 75° , 315° y $157^\circ 30'$.
- Deduce las fórmulas que permiten expresar $\sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ y $tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, en función de $\sen x$, $\cos x$, y $tg x$.
- La tangente de un ángulo, x , del segundo cuadrante es $-4/5$. Halla las razones trigonométricas de los ángulos $2x$ y $x/2$.
- Deduce una fórmula que permita expresar la $tg(x+y+z)$ en función de $tg x$, $tg y$, $tg z$.
- A partir de la fórmula anterior demuestra que si x , y , z son los ángulos de un triángulo cualquiera, entonces se cumple que $tg x + tg y + tg z = tg x tg y tg z$.
- Demuestra que si x , y , z son los ángulos de un triángulo, entonces $tg(x+y) + tg z = 0$.
- Demuestra la fórmula $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$.
- Deduce de la fórmula anterior el valor de $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$.

16. Simplifica las siguientes expresiones:

$\frac{\operatorname{sen} 2a}{1 - \cos^2 a} \cdot \frac{1 + \cos a}{\cos a}$	$\frac{\operatorname{sen} 2a}{1 - \cos^2 a} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos a}$	$\frac{\operatorname{sen}(a + \pi) \operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)}{\cot(\pi - a)}$	$\frac{\operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 4a}{\cos 2a - \cos 4a}$
$\frac{\left(\operatorname{sen} \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2}\right)^2 (1 + \operatorname{sen} a)}{\operatorname{sen} 2a}$	$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$	$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} \cdot \frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b}$	$\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x$

17. Demuestra las siguientes identidades:

$\operatorname{sen}(a + b) \operatorname{sen}(a - b) = \cos^2 b - \cos^2 a$	$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$	$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$
$\sec(a - b) = \frac{\sec a \sec b \csc a \csc b}{\csc a \csc b + \sec a \sec b}$	$\frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)} = \operatorname{tg} b$	$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 4 \operatorname{ctg} 2x \csc 2x$
$\frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$	$\frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\operatorname{sen}(a - b)} = \frac{\operatorname{tga} \operatorname{ctg} b + 1}{\operatorname{tga} \operatorname{ctg} b - 1}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \operatorname{tg} 2a$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$\operatorname{sen}^4 x - 2 \cos^4 x + 1 = 0$	$4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos x = 3$	$\operatorname{sen} 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$4 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$	$8 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \sec x$	$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$
$\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$	$\operatorname{sen} x + \cos x = \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x)$	$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 = \operatorname{sen} 2x$

19. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \operatorname{sen} x = 1 - \cos y \\ 2 \cos x = 1 + \cos y \end{cases}$
$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{sen}(x + y) - \cos x \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$	

20. Demostrar que $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$.

21. Demostrar que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$. Deducir de la fórmula anterior el valor de la expresión siguiente: $\operatorname{arctg}(0'5) + \operatorname{arccotg}(3)$.