Capítulo 10

DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES. OPTIMIZACIÓN

10.1. Introducción

Sin duda uno de los pilares básicos de las matemáticas lo constituye el cálculo diferencial (o cálculo de derivadas). Las aplicaciones de las derivadas son múltiples y se dan en muchos y muy diversos campos.

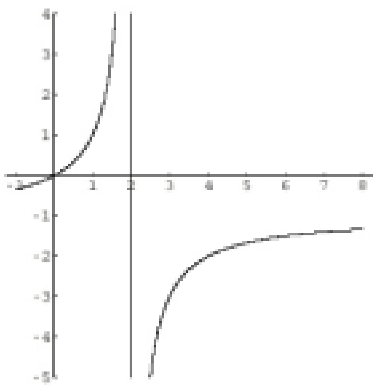
El cálculo diferencial tuvo su gérmen en los trabajos del ilustres matemáticos como I.Newton y G.W. Leibnitz, quienes, independientemente uno del otro, llegaron a resultados similares en el siglo XVII.

En este tema se añalizarán algunas de las principales aplicaciones de las derivadas de funciones, que posibilitan el cálculo de extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión, facilitan el trazado de curvas y sirven de herramienta para la resolución de los llamados problemas de optimización, en los cuales se trata de encontrar la solución óptima (máxima o mínima) a cierto problema.

10.2. Introducción al concepto de derivada. Tasas de variación media e instantánea.

Sabemos que las funciones son crecientes en ocasiones, decrecientes en otras, e incluso constantes en alguna de sus partes.

Ahora bien, no todas las funciones crecientes crecen de igual modo, e incluso una misma función creciente puede crecer de distinta forma, dependiendo de que nos encontremos en una parte u otra. Analicemos un ejemplo. La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{-x}{x-2}$:



Es evidente que la función es creciente a partir del punto de abscisa $x = 2$. Ahora bien, ¿siempre crece de igual modo?.

Evidentemente no.

Tomemos un intervalo, por ejemplo el intervalo $[3,4]$.

¿Cuánto ha crecido la función en ese intervalo?. Como:

$$f(3) = \frac{-3}{1} = -3$$

y

$$f(4) = \frac{-4}{2} = -2$$

la función ha crecido en realidad:

$$f(4) - f(3) = 1$$

1 unidad.

Si nos fijamos en otro intervalo donde la función también sea creciente, el $[4,6]$, veamos como crece la función.

Como $f(4) = -2$ y

$$f(6) = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

el crecimiento total es de

$$f(6) - f(4) = \frac{-3}{2} - (-2) = \frac{1}{2}$$

tan sólo media unidad, aunque el intervalo es dos veces mayor que el primero.

Podemos inferir entonces que la función es mucho más creciente, o que crece más rápidamente en el intervalo $[3,4]$ que en el $[4,6]$.

La formalización de estas ideas la da la *Tasa de Variación Media* de una función.

Definición: Se llama *Tasa de Variación Media* en un intervalo $[a,b]$ de una función $f(x)$, y se expresa por $TVM[a,b]$, al cociente:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La TVM no es más que la diferencia entre los valores de la función en los extremos del intervalo dividida entre la longitud del intervalo.

Por tanto, de esta primera definición podemos deducir algunas propiedades:

* Si la TVM en el intervalo es positiva, significa que la función crece, globalmente en el intervalo. (Entiéndase globalmente en el sentido de que no es necesariamente creciente en todo el intervalo, pero en definitiva hay un crecimiento de la función en dicho intervalo).

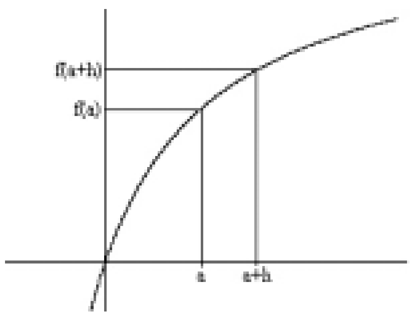
* Si la TVM en el intervalo es negativa, la función decrecerá.

* La magnitud del crecimiento o el decrecimiento dependerá de la magnitud de la TVM.

Así pues la TVM nos da una idea de cómo crece o decrece la función y con qué rapidez lo hace.

Sin embargo, la TVM no resuelve todos los problemas, puesto que nos podemos plantear si la función es creciente o no en un punto concreto, no en un intervalo.

La TVM y el concepto de límite solucionan el problema:



Si queremos saber si la función tiene una tendencia creciente o decreciente en un punto a, utilizaremos el concepto de TVM como antes en un intervalo $[a, a+h]$:

$$TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A medida que nos acercamos al punto a, es decir, a medida que h se acerca a 0, la tasa de variación media en ese intervalo se acerca al dato buscado, la tasa de variación en ese punto concreto. Más concretamente:

Definición: Se llama *Tasa de Variación Instantánea* en un punto a de una función $f(x)$ al valor, denotado por $TVI(a)$:

$$TVI(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo: Calcular la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ en el punto 2.
Aplicando la definición:

$$TVI(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2+h}{2+h-1} - \frac{2}{2-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2+h}{1+h} - 2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2+h-2-2h}{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h+1} = 1$$

Ejercicio: Calcula la Tasa de Variación Instantánea para las siguientes funciones en los puntos indicados:
a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ en $x = 0$ y $x = -1$.
b) $g(x) = x^3 - x + 3$ en $x = 1$ y $x = -2$.
c) $h(x) = \sqrt{x+3}$ en $x = 6$ y $x = -2$.

10.3. Definición de derivada. Reglas de derivación. Interpretación geométrica

La tasa de variación instantánea en un punto es precisamente la derivada de la función en un punto. Formalicemos:

Definición: Dada una función $f(x)$ y un punto a, se llama *derivada* de la función $f(x)$ en el punto a, y se representa por $f'(a)$ a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es decir la derivada en un punto es la tasa de variación instantánea en ese punto.

El problema que nos podemos encontrar es el siguiente.
Si tenemos una función, digamos $f(x) = 2x^2 + 1$, y calculamos su derivada en un punto $x = -3$, tendremos que hacer:

$$f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(-3+h)^2 + 1 - (2(-3)^2 + 1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(9+h^2-6h) + 1 - 19}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 - 12h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2h-12)}{h} = \lim_{h \to 0} 2h - 12 = -12$$

Ahora bien, si queremos calcular la derivada en el punto 2 de la misma función, tenemos que volver a calcular ese límite, lo cuál es un trabajo engorroso.
Conviene, por tanto calcular la función derivada de $f(x)$, es decir $f'(x)$.

Esta función derivada permite calcular la derivada en cualquier punto sin más que sustituir en el punto concreto. Por ello es conveniente dominar las llamadas reglas de derivación para las funciones más habituales.

Por otra parte, es posible calcular las derivadas sucesivas de una función.

La derivada segunda será la derivada de la función derivada, y se representará por $f''(x)$, y así sucesivamente las funciones derivadas tercera ($f'''(x)$), cuarta, etc.

10.3.1. Propiedades de las derivadas. Reglas de derivación

1. La derivada de una constante es nula:

$$f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

2. Derivada de la suma (o diferencia de funciones):

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

3. Derivada del producto de una función por una constante:

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

4. Derivada del producto de funciones:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5. Derivada del cociente de funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6. Derivada de la composición de funciones (Regla de la cadena):

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

10.3.2. Derivadas elementales

Función elemental	*Derivada*
1.- $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$
2.- $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
3.- $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
4.- $f(x) = log_a x,\ a \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
5.- $f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
6.- $f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$
7.- $f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen } x$
8.- $f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
9.- $f(x) = \csc x$	$f'(x) = -\cot x \cdot \csc x$
10.- $f(x) = \sec x$	$f'(x) = \tan x \cdot \sec x$
11.- $f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sen }^2 x} = -\csc^2 x$
12.- $f(x) = \text{arc sen } x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.- $f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.- $f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
15.- $f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
16.- $f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Con todas estas propiedades es mucho más fácil derivar, por ejemplo, para la función y el punto anterior, calculamos la función derivada:

$$f(x) = 2x^2 + 1 \Longrightarrow f'(x) = 4x$$

y ahora, conocida la función derivada podemos calcular la derivada en cualquier punto: En $x = 2$,

$$f'(2) = 4 \cdot 2 = 8$$

En $x = -3$,

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3) = -12$$

Es mucho más cómodo y no tenemos que recurrir a la definición.

10.3.3. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada tiene una interpretación geométrica muy sencilla.

Observemos la función $f(x)$. Si calculamos las respectivas tasas de variación media en los intervalos que se acercan al punto a, como la tasa de variación media es:

$$TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

este cociente corresponde a la pendiente (o inclinación) de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$:

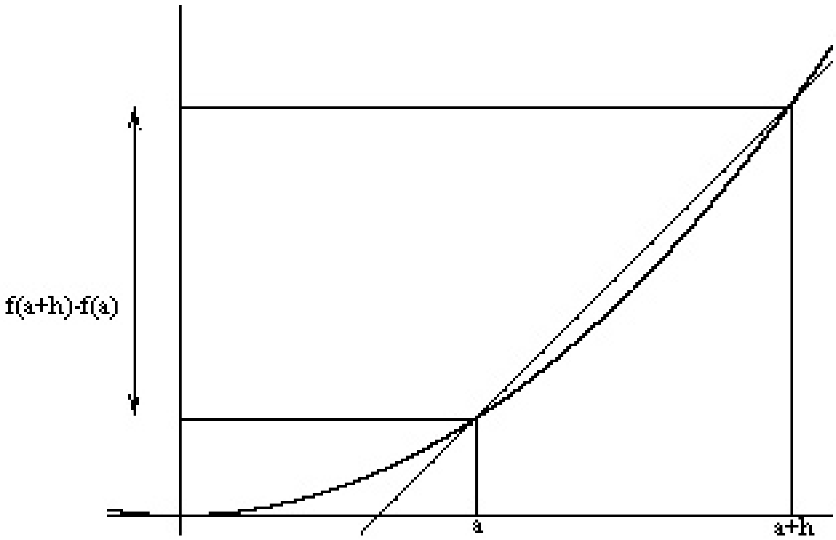


Figura 10.1: La pendiente de la recta secante es $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Por tanto cuando nos acercamos al punto a, es decir, cuando calculamos el valor de la tasa de variación instantánea o derivada en el punto a, dicho valor es precisamente la pendiente de la recta tangente en el punto a, es decir, aquella recta que sólo corta (en las cercanías del punto) a la función $f(x)$ en el punto a.

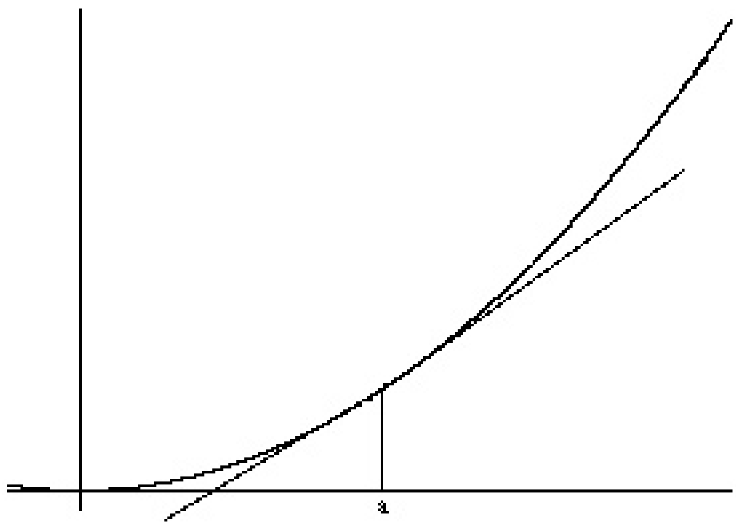


Figura 10.2: La pendiente de la recta tangente es $f'(a)$.

Recordemos que la pendiente de una recta es, en cierta forma, la inclinación de la recta.
Si α es al ángulo que forma la recta con el eje x y m es la pendiente de la recta, se cumple que:

$$m = \tan\alpha$$

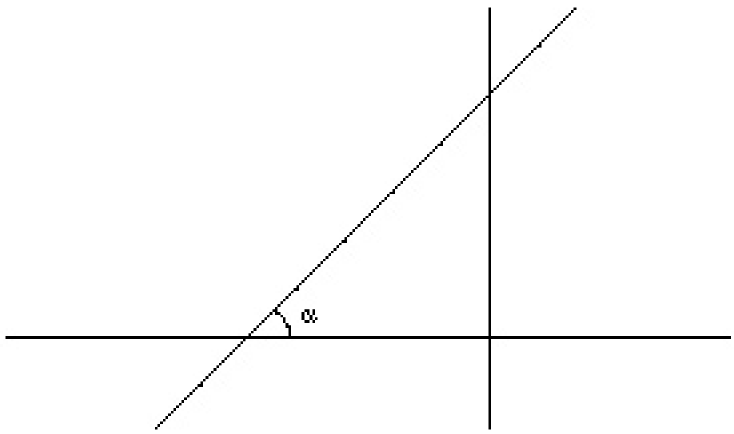


Figura 10.3: La pendiente de la recta tangente es $m = \tan\alpha$

Así, si $f(x)$ es la función y queremos calcular la tangente en el punto $(a, f(a))$, sabemos que la pendiente de la recta tangente es $m = f'(a)$, y utilizando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, sabemos que la ecuación de dicha recta tangente es:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$$

Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = e^{2x+2}$ en el punto -1.

Como $a = -1$, en primer lugar calculamos:

$$f(-1) = e^{-2+2} = e^0 = 1$$

Para calcular $f'(-1)$, derivamos:

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x+2}$$

y por tanto la derivada en el punto $a = -1$ será:

$$f'(-1) = 2 \cdot e^{-2+2} = 2 \cdot e^0 = 2$$

Con estos datos, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) \Longrightarrow y - 1 = 2(x + 1) \Longrightarrow y = 2x + 3$$

Graficamente la función y la recta tangente son:

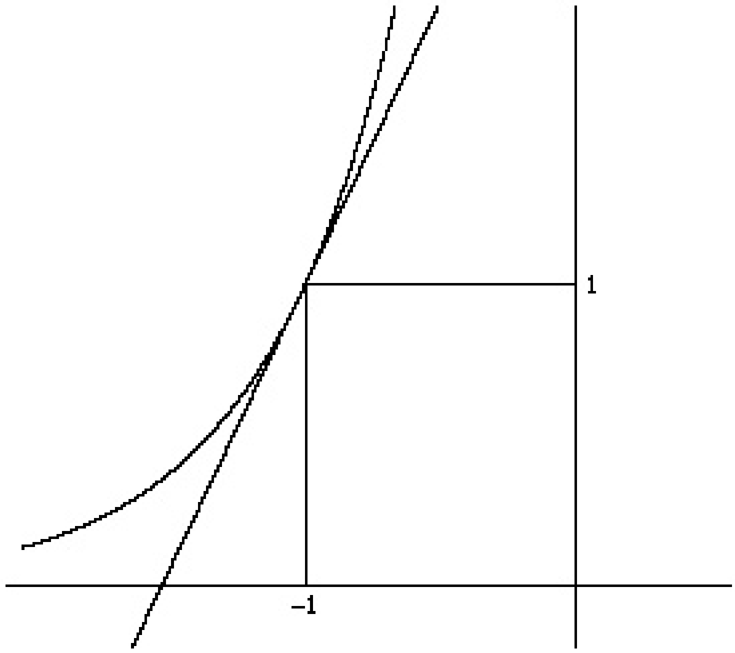


Figura 10.4: Curva $f(x) = e^{2x+2}$ y tangente en $x = -1$, $y = 2x + 3$.

10.4. Aplicaciones de las derivadas a la Física y la Economía

10.4.1. Aplicación a la Física

La derivada tiene una importante aplicación en el campo de la física.

Si una partícula lleva un movimiento cualquiera en el que el espacio recorrido viene dado por una función $e(t)$, es decir, el espacio dado en función del tiempo, entonces se cumple que:

a) La derivada del espacio, $e'(t)$ representa la velocidad de la partícula en el instante t, es decir, la derivada del espacio es la velocidad:

$$v(t) = e'(t)$$

b) Además, la derivada de la velocidad, $v'(t)$ representa la aceleración de la partícula en cualquier instante t, es decir, la derivada de la velocidad (o la derivada segunda del espacio) es la aceleración:

$$a(t) = v'(t) = e''(t)$$

Ejemplo: El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t) = 3t^2 - t + 1$.

a) Calcular la tasa de variación en el intervalo $[2, 6]$.

b) Hallar la velocidad en el instante $t = 0$.

c) Hallar la velocidad y aceleración en el instante $t = 2$.

a) Aplicando la fórmula:

$$e(6) = 108 - 6 + 1 = 103, \quad e(2) = 12 - 2 + 1 = 11$$

luego:

$$TVM[2, 6] = \frac{e(6) - e(2)}{6 - 2} = \frac{103 - 11}{4} = \frac{92}{4} = 23 \quad m/s$$

b) La velocidad será:

$$v(t) = e'(t) = 6t - 1 \Longrightarrow v(0) = -1 \quad m/s$$

c) En el instante 2:

$$v(2) = 11 \quad m/s$$

Y la aceleración en ese mismo instante;

$$a(t) = v'(t) = 6$$

Por tanto,

$$a(2) = 6 \quad m/s^2$$

la aceleración es constante, es un movimiento uniformemente acelerado.

10.4.2. Aplicación a la Economía

La aplicación a la Economía se refiere al concepto de *marginalidad*.

Así, el coste marginal de fabricación de un producto es el incremento de coste que se produce cuando se aumenta la producción en una unidad más.

Del mismo modo se hablaría del incremento de los ingresos por la última unidad vendida, ingreso marginal.

En cualquier caso, siempre que se utilice el término marginal , se trata de la derivada de la función de que se esté tratando, respecto de la variable de producción, que se mide en unidades fabricadas.

Supongamos, por ejemplo, que la función de costes de cierto producto viene dada por la expresión $c(x) = 30 + 50x - x^2$, donde $c(x)$ se expresa en euros y x en unidades.

El coste marginal para producir la unidad $x + 1$ sería $c'(x) = 50 - 2x$.

En realidad, la derivada no proporciona exactamente el coste marginal, sino una aproximación que facilita el cálculo. Dicho coste marignal, rigurosamente, viene dado por $c(x + 1) - c(x)$, pero esta diferencia se puede aproximar bien por la derivada $c'(x)$.

Si queremos calcular el coste marginal producido al producir la 3ª unidad, fijémonos en que estaríamos calculando el coste marginal de la unidad nº 2, $c'(2) = 46$, es decir, 46 euros.

Si no utilizásemos la derivada, el coste marginal sería:

$$c(3) = 30 + 150 - 9 = 171, \quad c(2) = 30 + 100 - 4 = 126 \Longrightarrow c(3) - c(2) = 171 - 126 = 45$$

no es el valor que obteníamos con la derivada, pero es una buena aproximación.

Las funciones de la Economía tienen un campo de validez que, por lo general, es restringido respecto al dominio de definición de la función.

En este caso, por ejemplo, la función es válida desde $x = 0$ hasta $x = 25$; a partir de ahí, si observamos el coste marginal, disminuyen los costes de fabricación, lo que es absurdo si se está fabricando más.

Notemos, además que si queremos calcular el coste marginal si se quiere producir la unidad número n, hemos de calcular la función de coste marginal evaluada en la unidad anterior, que es la última unidad producida, es decir, en la unidad $n - 1$.

Lo mismo se puede decir si la función es de ingresos o de beneficios.

Ejercicios:

1. El desplazamiento de un móvil que se mueve a lo largo de una linea recta viene dado por la función $e(t) = e^{t^2} - 1$.

   Halla la velocidad y la aceleración del movimiento. En el instante inicial, ¿cuáles son éstas?.

2. Las funciones de ingresos y gastos correspondientes a cierto producto de consumo son, respectivamente:

   $$I(x) = 80x - 0'1x^2, \quad C(x) = 500 + 20x$$

   . Halla la función beneficio y el beneficio marginal. ¿Para qué valores de x están definidas estas funciones?.

10.5. Derivabilidad y continuidad

Se estudió en el tema anterior el concepto de continuidad de una función en un punto.

Vimos, por ejemplo, que intuitivamente se puede decir que una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, o de manera más formal, cuando en el punto coinciden los límites laterales con el valor de la función en el punto, esto es:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

La condición para que una función sea derivable es más fuerte, más restrictiva. Para ello es necesario definir las derivadas laterales.

Definición: Dado un punto a y una función $f(x)$, se define la *derivada lateral por la derecha* de la función $f(x)$ y se expresa por $f'_+(a)$, como:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Dado un punto a y una función $f(x)$, se define la *derivada lateral por la izquierda* de la función $f(x)$ y se expresa porpor $f'_-(a)$, como:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definición: Diremos que una función es *derivable* en un punto a cuando existen y son finitas las derivadas laterales y son iguales, es decir:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

Ejemplo: Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \le 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Calculando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Además $f(0) = 0$, por tanto la función es continua en el punto $x = 0$ que es el único punto conflictivo.

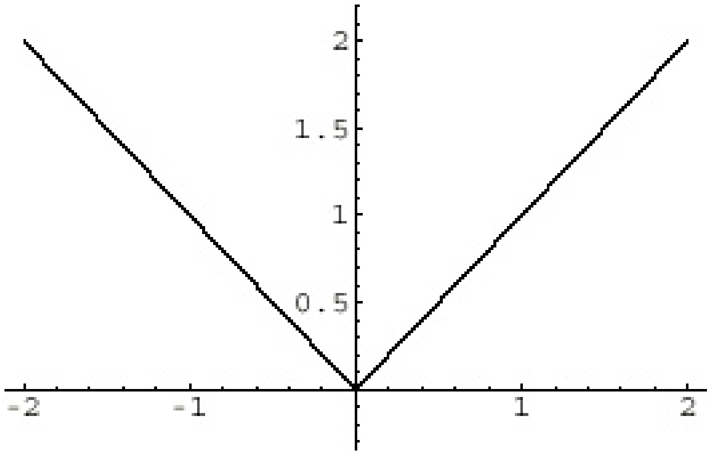
Analicemos la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Por tanto la función no es derivable en $x = 0$.

Viendo la gráfica de la función, se observa lo que ocurre:



La función es continua pues se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, pero no es derivable en el cero porque en dicho punto hay un *punto anguloso*, una "esquina". En puntos como estos, la función no es derivable.

Por tanto, se verifica que aunque una función puede ser continua en un punto y sin embargo no ser derivable en ese mismo punto.

Sin embargo, la posibilidad contraria no es posible. Resumiendo:

Propiedad:
Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Sin embargo, el recíproco no es cierto, si una función es continua en un punto, la función puede ser o no derivable en dicho punto.

Ejercicios:

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & si \quad x \leq -2 \\ x^2-3 & si \quad -2 < x \leq 2 \\ 2x-3 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

2. Calcula a y b para que sea derivable la función:

$$g(x) = \begin{cases} ax+3 & si \quad x \leq 1 \\ 2x^2-b & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Indicación: Primero impón la condición de que sea continua

10.6. Aplicaciones de las derivadas al cálculo del crecimiento y decrecimiento de una función. Cálculo de extremos

Observemos la siguiente gráfica:

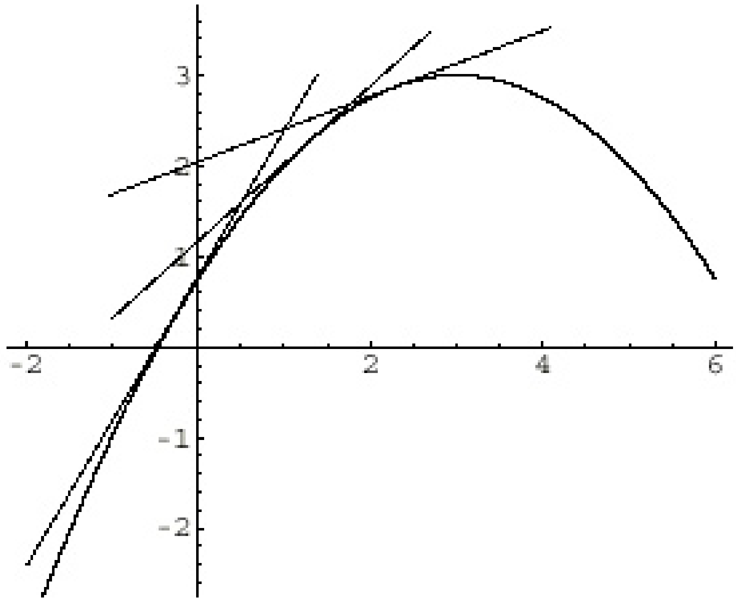


Figura 10.5: La pendiente de las tangentes (la derivada) es positiva si la función crece.

Si trazamos las correspondientes tangentes en diversos puntos, todos ellos donde la función es creciente, obsevamos como la recta tangente está cada vez menos inclinada, lo que quiere decir (ya que la inclinación de una recta se mide a través de su pendientes y sabemos que esta coincide con la derivada) que la derivada es cada vez menor.

Más aún, como las rectas tangentes tienen inclinación positiva (son rectas crecientes), las pendientes son cada vez menores y positivas, es decir, la derivada es positiva en aquellos intervalos en los que la función es creciente.

Si seguimos trazando tangentes, llegamos al punto 3, donde la tangente es totalmente horizontal, es decir:

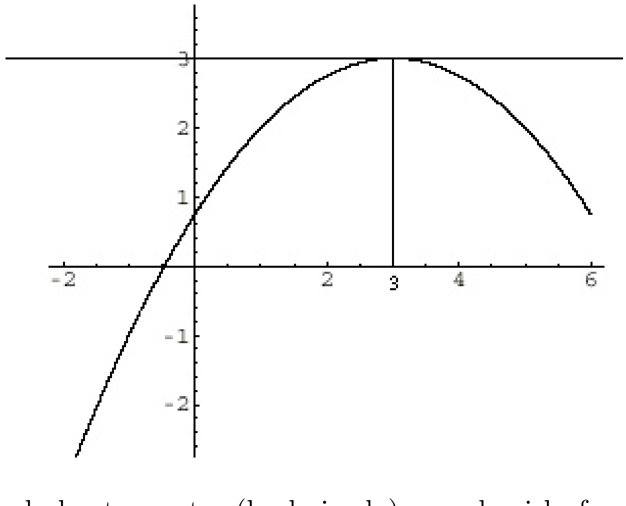


Figura 10.6: La pendiente de las tangentes (la derivada) es nula si la función tiene un extremo (un valor máximo o mínimo).

Decíamos que la pendiente era decreciente, hasta que llega al máximo de la función, donde se ha alcanzado el valor extremo de la pendiente. La recta es horizontal, no está inclinada y su pendiente es cero.

Si seguimos trazando las tangentes, vemos ahora lo siguiente:

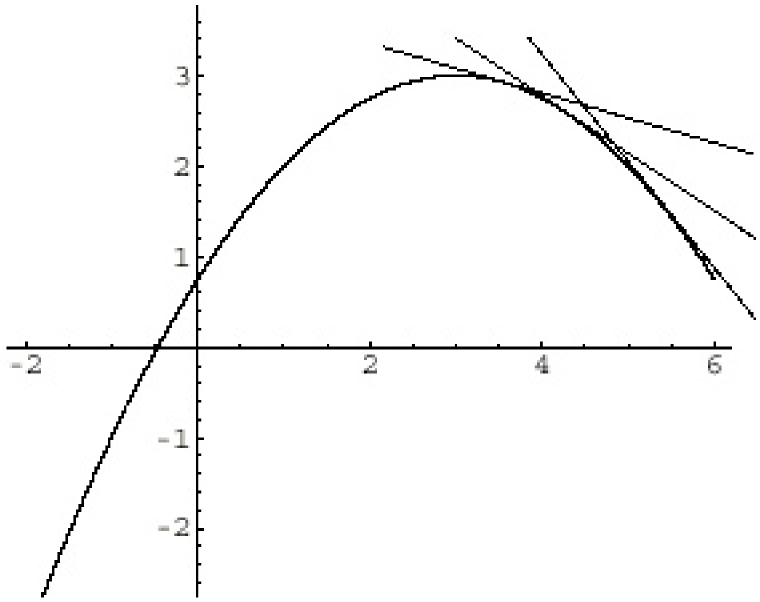


Figura 10.7: La pendiente de las tangentes (la derivada) es negativa si la función decrece.

Y ahora observamos que la pendiente de la recta (la derivada) es negativa, y cada vez menor, por tanto si la función de decreciente, afirmamos que la función derivada es negativa.

Todo lo observado anteriormente lo podemos resumir en la siguiente propiedad.

Propiedad: Dada una función $f(x)$, se cumple que:

a) Si $f'(x) > 0$ (*la derivada es positiva*) entonces la función $f(x)$ es *creciente*.

b) Si $f'(x) < 0$ (*la derivada es negativa*) entonces la función $f(x)$ es decreciente.

c) Si $f'(x) = 0$ entonces la función puede presentar un extremo relativo (máximo o mínimo) en dicho punto.

La manera práctica de proceder, por tanto, para determinar los extremos de una función, así como aquellos intervalos en los que la función crece o decrece es la siguiente:

* Calculamos la derivada de la función, $f'(x)$, y la igualamos a cero, resolvemos la ecuación resultante, cuyas soluciones son los posibles extremos de la función.

* Realizamos una tabla en la que tenemos que poner los puntos obtenidos anteriormente y además los puntos conflictivos de la función (aquellos donde la función no está definida, o donde no es derivable....). Todos estos puntos se denominan puntos críticos.

* En dicha tabla, estudiamos el signo de la derivada primera, $f'(x)$.

Si dicha derivada es positiva, nos indicará el crecimiento de la función, y si es negativa, será un signo de su decrecimiento. El paso de un intervalo creciente a otro decreciente o viceversa nos indicará la existencia de un máximo o un mínimo relativo de la función $f(x)$.

Ejemplo: Estudiar los intervalos de crecimiento y los extremos de la función: $f(x) = x^3 - 3x$.

Comenzamos calculando la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Igualando a cero:

$$3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

obtenemos dos puntos críticos, y no hay más pues la función es polinómica y por tanto, su dominio son todos los números reales y no presenta problemas. Hacemos una tabla como la siguiente:

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Para obtener los signos de $f'(x)$ basta tomar, por ejemplo, un punto en cada intervalo y sustituir en la expresión de la derivada.

Entre $-\infty$ y -1 tomamos el -2, con lo que:

$$f'(-2) = 12 - 3 = 9 > 0$$

positiva. Entre -1 y 1, tomamos el 0, quedando:

$$f'(0) = -3 < 0$$

negativa. Entre 1 e ∞ se toma el 2, y se obtiene:

$$f'(2) = 12 - 3 = 9 > 0$$

positivo.

Concluimos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en $(-1, 1)$.

Además, se observa que presenta un máximo en el punto $x = -1$, y un mínimo en $x = 1$.

¿Cómo calcular la segunda coordenada del máximo y el mínimo?.

Basta sustituir en la función:

El máximo está en el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$.

El mínimo está en el punto $(1, f(1)) = (1, -2)$.

Así, la representación aproximada de la función será:

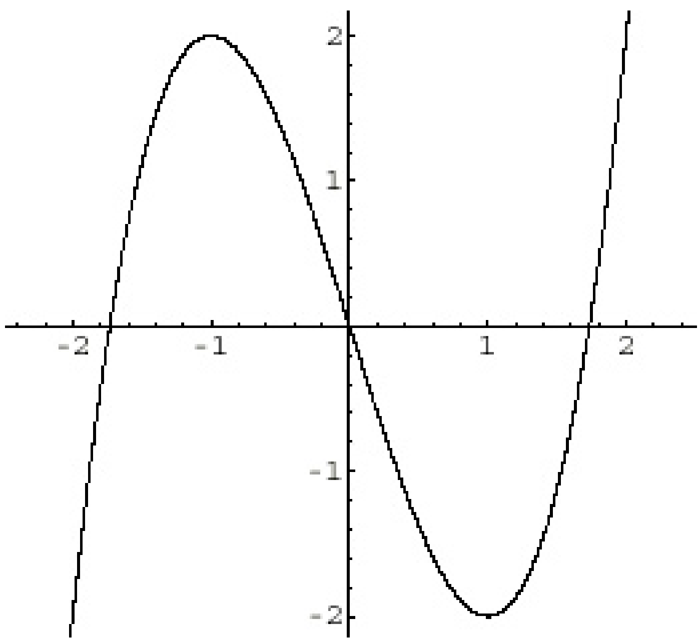


Figura 10.8: Gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$. Intervalos de crecimiento y extremos.

Ejemplo: Estudiar los intervalos de crecimiento y los extremos de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$$

Derivando:

$$f'(x) = \frac{(4x-3)e^x - e^x(2x^2-3x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(-2x^2+7x-3)}{(e^x)^2} = \frac{-2x^2+7x-3}{e^x}$$

E igualando a cero:

$$\frac{-2x^2+7x-3}{e^x} = 0 \Longrightarrow -2x^2+7x-3 = 0 \Longrightarrow x = 3, \quad x = \frac{1}{2}$$

No hay más puntos conflictivos, pues aunque hay denominador, nunca se hace cero, pues e^x, la función exponencial es siempre positiva, de modo que Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

Así pues los únicos puntos críticos son $x = 3, \quad x = \frac{1}{2}$.

Hacemos la tabla:

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Con lo que $f(x)$ es creciente en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, \infty)$.

Por tanto $f(x)$ presenta un máximo relativo en:

$$(3, f(3)) = \left(3, \frac{9}{e^3}\right) \approx (3, 0'45)$$

y un mínimo relativo en

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{e^{\frac{1}{2}}}\right) \approx (0'5, -0'61)$$

Gráficamente:

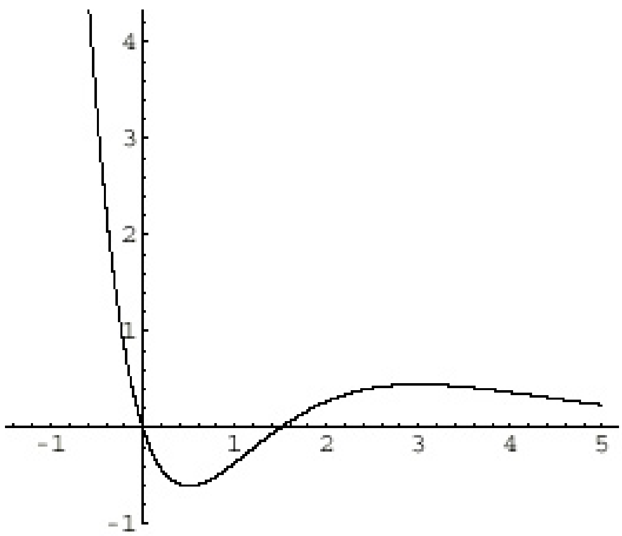


Figura 10.9: Gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Intervalos de crecimiento y extremos.

10.7. Aplicaciones de las derivadas al cálculo de la concavidad y la convexidad, puntos de inflexión. Criterio para determinar máximos y mínimos.

Igual que se aplican las derivadas para el cálculo de los máximos y los mínimos, y el crecimiento o decrecimiento de la función, también se pueden aplicar para calcular la concavidad y la convexidad. Fijémonos en la función siguiente, convexa (o, para evitar ambigüedades, cóncava hacia abajo):

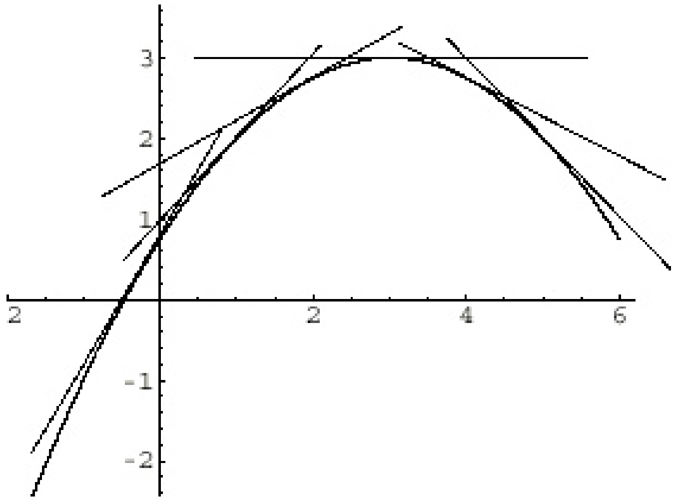


Figura 10.10: La pendiente de las tangentes pasa de positiva a negativa (es decir, decrece) si la función es cóncava hacia abajo

Al trazar las tangentes, nos fijamos en que cada vez son menores.

Empiezan siendo positivas y muy grandes, van decreciendo hasta que valen cero, y luego comienzan a ser negativas y cada vez menores. Es decir, que la función derivada es decreciente, $f'(x)$ decreciente. Si $f'(x)$ es decreciente, es que su derivada es negativa, es decir, $f''(x) < 0$.

Por tanto se deduce que si la derivada segunda de la función es negativa, la función es cóncava hacia abajo.

De igual modo si nos fijamos en una función cóncava (o cóncava hacia arriba):

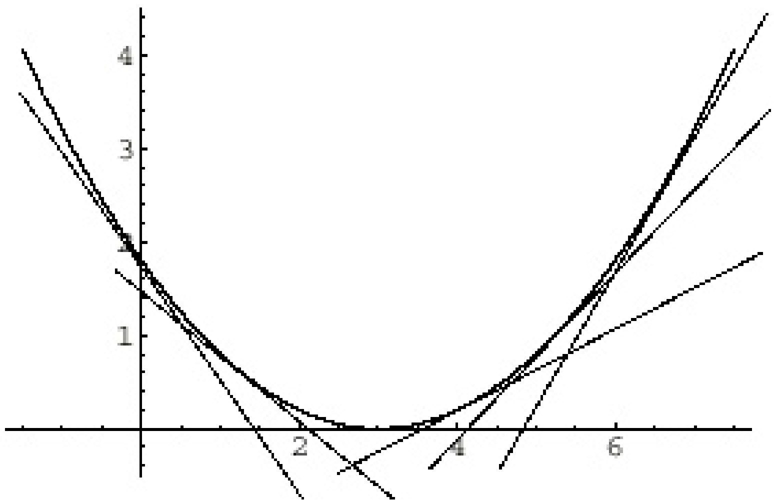


Figura 10.11: La pendiente de las tangentes pasa de negativa a positiva (es decir, crece) si la función es cóncava hacia arriba

En este caso la derivada es creciente, y por tanto la derivada segunda será positiva. Es decir, si la derivada segunda es positiva, la función es cóncava hacia arriba.

Propiedad: Dada una función $f(x)$, se cumple que:
a) Si $f''(x) > 0$, entonces la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba.
b) Si $f''(x) < 0$, entonces la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo.
c) Si $f''(x) = 0$, entonces el punto es un posible *punto de inflexión* (un punto donde la función pasa de cóncava hacia arrina a cóncava hacia abajo o viceversa) de la función.

El proceso para determinar la concavidad y puntos de inflexión es, por tanto, muy similar al del cálculo del crecimiento, únicamente hay que hacer la derivada segunda e igualarla a cero. La tabla es similar.

Ejemplo: Calcular la concavidad y convexidad de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Calculando la derivada segunda:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow f''(x) = 6x$$

Igualando a cero, $6x = 0$, de donde $x = 0$.

Es el único punto conflictivo, pues la función es polinómica.

Haciendo la tabla:

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

Así pues la función es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.

Hay un punto de inflexión es $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Se observa gráficamente:

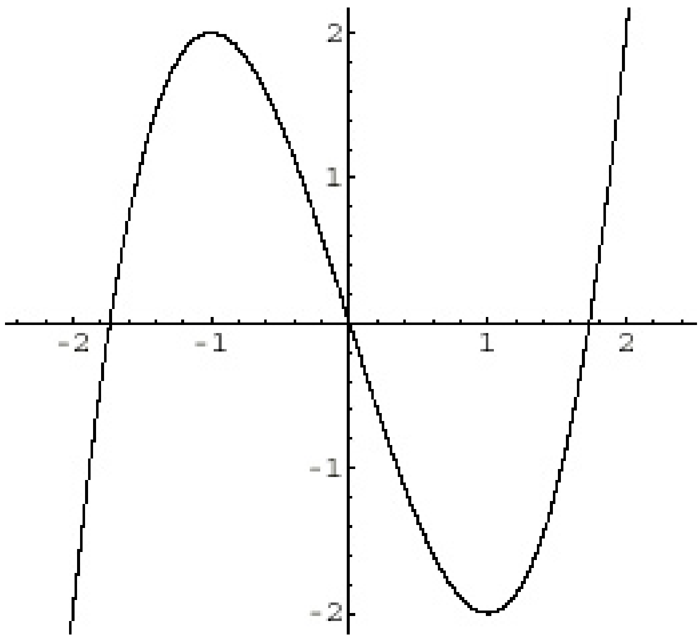


Figura 10.12: Gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Ejercicios: Estudiar la concavidad y convexidad, el crecimiento y el decrecimiento, los extremos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$
b) $g(x) = \dfrac{2}{x}$
c) $h(x) = x^4 - 12x^2 + 8$
d) $t(x) = x \cdot e^{-2x}$

Además la derivada segunda permite discernir si un punto crítico es un máximo o un mínimo, en base al siguiente resultado:

Propiedad: Si a es un punto tal que $f'(a) = 0$ (un posible extremo relativo), entonces:
* Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo de la función.
* Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo de la función.
* Si $f''(a) = 0$ no podemos asegurar nada. (Aunque en realidad si se puede saber pero excede los contenidos del curso).

Ejemplo: Estudiar los intervalos de crecimiento y los extremos de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Comenzamos calculando la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$.
Igualando a cero:

$$3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

, obtenemos dos puntos críticos.
Calculando la derivada segunda:

$$f''(x) = 6x$$

Sustituyendo,

$$f''(1) = 6 > 0$$

en $x = 1$ hay un mínimo.

$$f''(-1) = -6 < 0$$

en $x = -1$ hay un máximo.
Como ya habíamos obtenido anteriormente.

10.8. Representación gráfica de funciones

Con todas estas aplicaciones es sencillo representar gráficamente cualquier función, basándose en los siguientes puntos:

1. Dominio de definición.
2. Puntos de corte con los ejes:
   Con el eje x, $y = 0$.
   Con el eje y, $x = 0$.
3. Simetrías.
   Par si $f(-x) = f(x)$.
   Impar si $f(-x) = -f(x)$.
   No tiene simetría si no se da ninguna de esas condiciones.
4. Asíntotas: Verticales, Horizontales y Oblicuas.

5. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

6. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Ejemplo: Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2+1}$.

1. Dominio de definición

   Igualando a cero el denominador:

$$3x^2+1=0 \Longrightarrow x^2 = \frac{-1}{3} \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{-1}{3}} = \nexists$$

   de modo que Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

2. Puntos de corte con los ejes

   Con el eje x, $f(x) = 0$:

$$\frac{3x-1}{3x^2+1} \Longrightarrow 3x-1=0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$$

   el punto es $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

   Con el eje y, $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3\cdot 0 - 1}{3\cdot 0^2+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

   el punto es $(0, -1)$.

3. Simetrías

$$f(-x) = \frac{3(-x)-1}{3(-x)^2+1} = \frac{-3x-1}{3x^2+1} \neq \frac{3x-1}{3x^2+1} = f(x)$$

   f no es par.

$$f(-x) = \frac{3(-x)-1}{3(-x)^2+1} = \frac{-3x-1}{3x^2+1} \neq -\frac{3x-1}{3x^2+1} = -f(x)$$

   f no es impar, luego f no tiene simetrías.

4. Asíntotas

   Verticales: No tiene puesto que Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

   Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{3x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(-x)-1}{3(-x)^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x-1}{3x^2+1} = 0$$

   Hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

   Oblicuas: No hay, pues hay horizontales.

5. Crecimiento

   Derivando:

$$f'(x) = \frac{3(3x^2+1) - 6x(3x-1)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-9x^2+6x+3}{(3x^2+1)^2} = 0$$

   Igualando a cero:

$$-9x^2+6x+3=0 \Longrightarrow -3x^2+2x+1=0 \Longrightarrow x=1 \quad x=\frac{-1}{3}$$

No hay más puntos críticos, pues Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

Haciendo la tabla:

	$-\infty$ $\quad \frac{-1}{3} \quad$ 1 $\quad +\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ $+$ $\quad$ $-$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ $\nearrow$ $\quad$ $\searrow$

Luego $f(x)$ es creciente en $\left(\frac{-1}{3}, 1\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Tiene un máximo relativo en $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ y un máximo relativo en $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{\frac{4}{3}}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-6}{4}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-3}{2}\right)$.

6. Concavidad

Calculando la derivada segunda, es:

$$f''(x) = \frac{54x^3 - 54x^2 - 54x + 6}{(3x^2 + 1)^3}$$

e igualando a cero no se obtienen raíces exactas, por lo que no se puede hacer este estudio.

Con los datos que tenemos, podemos hacer un esbozo de la gráfica de la función:

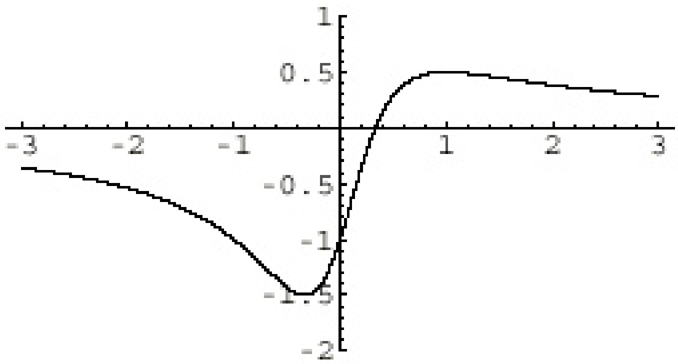


Figura 10.13: Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x - 1}{3x^2 + 1}$.

10.9. Optimización de funciones

La última aplicación de las derivada es la optimización de funciones. Consiste en calcular los máximos y los mínimos de cierta función que se obtiene de un problema surgido de una situación cotidiana.

En estos problemas siempre se tiene:

* Una *función* de la que hay que calcular el máximo o el mínimo, y que habitualmente tiene dos variables, x e y.

* Una *relación* entre x e y, que permite despejar una de las dos para obtener una función con una sola variable.

Veamos cómo se aplica:

Ejemplo: De entre todos los números cuya suma es 36, calcula aquellos cuya suma de cuadrados es mínimo.

Los números buscados son x e y.

La función a minimizar es $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Tenemos dos variables, luego todavía no podemos derivar.

La relación que tenemos es que los números suman 36, es decir, $x + y = 36$.

Despejando, $y = 36 - x$.

Y por tanto, la función a minimizar es:

$$f(x) = x^2 + (36 - x)^2$$

que ya tiene sólo una vatiable.

Para buscar sus mínimos, calculamos la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x + 2(36 - x)(-1) = 2x - 72 + 2x = 4x - 72$$

Igualando a cero,

$$4x - 72 = 0 \Longrightarrow x = \frac{72}{4} = 18$$

Además calculando la derivada segunda:

$$f''(x) = 4$$

con lo que sustituyendo:

$$f''(18) = 4 > 0$$

es positivo luego el punto $x = 18$ es un mínimo.

La solución es, por tanto, un número $x = 18$ y el otro $y = 36 - 18 = 18$.

Los dos números son iguales a 18.

Ejercicios:

1. Descompón el número 48 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

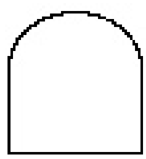
2. Halla un número positivo cuya suma con 4 veces su recíproco sea mínima.

3. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.

4. La suma de tres números es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

5. Un depósito abierto de chapa y de base cuadrada debe tener capacidad para 13500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que se precise la menor cantidad de chapa?

6. Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es 10 metros.



7. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.