2.3 Listas de ejercicios de Cálculo Integral

2.3.1 Cálculo de primitivas

175. Encontrar la expresión de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ b) $\int x(3x^2+1)^4\,dx$ c) $\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+7}\,dx$

d) $\int e^{-\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$ e) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ f) $\int x(2x+5)^{10}\,dx$

g) $\int x(2x+5)^{-10}\,dx$ h) $\int \frac{(2x+5)^{10}}{x}\,dx$ i) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$

j) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ k) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ l) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ n) $\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx$ o) $\int \operatorname{sen} x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$

p) $\int x\operatorname{sen} x\,dx$ q) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ r) $\int \ln^2 x\,dx$

176. Encontrar la expresión de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x-2)^2}$ b) $\int \frac{x^3+x}{(x^2+2)^2}\,dx$ c) $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+2)^2}$ e) $\int \frac{x}{x^6+1}\,dx$ f) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ h) $\int \frac{x^8}{(1-x^2)^5}\,dx$ i) $\int \frac{2x+1}{(x^2+4)^3}\,dx$

177. Encontrar la expresión de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \cos x\cos^2(3x)\,dx$ b) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$ c) $\int \operatorname{tg}^2(5x)\,dx$

d) $\int (\operatorname{tg}^3\frac{x}{4}+\operatorname{tg}^4\frac{x}{4})\,dx$ e) $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$ f) $\int \operatorname{sen}^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}\,dx$

g) $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$ h) $\int \cos^6(3x)\,dx$ i) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

j) $\int (\operatorname{sen} x\cos x)^{-2}\,dx$ k) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ l) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$

m) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ n) $\int \frac{3\operatorname{sen} x+2\cos x}{2\operatorname{sen} x+3\cos x}\,dx$ o) $\int \frac{dx}{\cos x+2\operatorname{sen} x+3}$

178. Encontrar la expresión de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ b) $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$ c) $\int \operatorname{sh}^3 x\operatorname{ch} x\,dx$

d) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}$ e) $\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx$ f) $\int \frac{dx}{\operatorname{th}(x)-1}$

g) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$ h) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ i) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ l) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx$

m) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{5x-x^2-4}}$ n) $\int x^{-4}(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx$ o) $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx$

2.3.2 Integral Definida

179. Comprobar que la función $f(x) = k$, donde k es constante, es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y calcular el valor de la integral.

180. Comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \\ 2, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$ es integrable Riemann en $[0, 2]$. (Utilizar la condición de integrabilidad de Riemann.)

181. Justificar razonadamente la falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $U(f, P_1) = 4$ para $P_1 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ y $U(f, P_2) = 5$ para $P_2 = \{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

b) $L(f, P_1) = 5$ para $P_1 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ y $L(f, P_2) = 4$ para $P_2 = \{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

c) Tomando $P \in \mathcal{P}[-1, 1]$,

(i) $L(f, P) = 3$ y $U(f, P) = 2$.

(ii) $L(f, P) = 3$ y $U(f, P) = 6$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2$.

(iii) $L(f, P) = 3$ y $U(f, P) = 6$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 10$.

182. Se sabe que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 6$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = 4$ y $\displaystyle\int_2^5 f(x)\, dx = 1$. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$ c) $\displaystyle\int_1^5 f(x)\, dx$.

183. Considerar la gráfica de la función $f(x) = x+2$ en $[-1, 1]$. Construir, a partir de ella, la función $F\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida medinate $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$.

184. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-2,0] \\ 2, & \text{si } x \in (0,3] \end{cases}$. Considerar las funciones $F_1, F_2\colon [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $F_1(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\, dt$ y $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Obtener expresiones para F_1 y F_2. ¿Son continuas en $[-2, 3]$?

b) Estudiar la derivabilidad de F_1 y F_2. En los puntos donde admiten derivada, ¿es cierto que $F_1'(x) = f(x)$? ¿y que $F_2'(x) = f(x)$?

c) $F_1 \neq F_2$, pero ¿en qué se diferencian?

185. Sean $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Hallar el dominio de g.

b) Encontrar un expresión para g y dibujar las gráficas de ambas funciones.

c) Estudiar la continuidad y derivabilidad de ambas funciones.

d) Comprobar que $g'(x) = f(x)$, para cada $x \in \mathrm{Dom}(g')$.

186. Sea $f(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$. Calcular $f(x)$ y $f'(x)$, indicando sus dominios de definición.

187. Hallar $f'(x)$, indicando su dominio de definición, para

a) $f(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt.$ b) $f(x) = \left(\displaystyle\int_a^{x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt\right)^3.$

c) $f(x) = \displaystyle\int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt.$ d) $f(x) = \displaystyle\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt.$

188. Hallar el dominio y la expresión de $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{47} \frac{1}{t}\, dt$ b) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\ln|x|} \frac{1}{t}\, dt$ c) $f(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{\cos x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$

189. Sean f derivable y $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. ¿Es cierto que $F'(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\, dt$? ¿Por qué?

190. Si f es continua, calcular $F'(x)$, siendo $F(x) = \displaystyle\int_0^x x f(t)\, dt$.

191. Probar que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y periódica de periodo T, entonces

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

192. Demostrar que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$$

193. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y continua, con $f(0) = 0$. Calcular los extremos de la función $\displaystyle\int_0^{(x+3)(x-1)} f(t)\, dt$.

194. Dada la función f estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, con $f(0) = 0$, y continua, estudiar el crecimiento, decrecimiento y los extremos de $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3-2x^2+x} f(t)\, dt$.

195. Encontrar los valores de x para los que la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t^2} dt$ alcanza algún extremo.

196. Sean f y g funciones reales continuas en $[a,b]$ que verifican que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demostrar que existe un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

197. Se define la función **beta** por $B(n,m) = \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1} dx$ para $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$.

a) Probar que $B(n,m) = B(m,n)$.

b) Probar que $B(n,1) = B(1,n) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!\cdot 0!}{n!}$.

c) Probar que si $n, m \geq 2$, $B(n,m) = \frac{n-1}{m} B(n-1, m+1) = \frac{m-1}{n} B(n+1, m-1)$ y deducir de ello que $B(n,m) = \frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(n+m-1)!}$.

2.3.3 Aplicaciones de la Integral

198. Probar que el área encerrado por la curva $f(x) = px^n$, con $x \in [0, a]$, $p \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ es $\frac{a|f(a)|}{n+1}$.

199. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje de abcisas.

200. Calcular, de dos maneras distintas, el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$, y el eje $\mathtt{OY}$.

201. Hallar el área encerrado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

202. Hallar el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, y la recta $y = 2x$.

203. Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 2x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

204. Calcular el área de la figura limitada por la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta $x = 2a$.

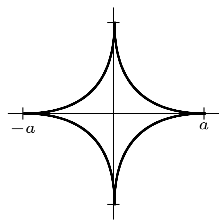
205. Calcular el área de cada una de las partes en que las curvas $2y = x^2$ y $2x = y^2$ dividen al círculo $x^2 + y^2 \leq 3$.

206. Calcular el área limitada por las curvas $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ y $g(x) = \frac{1}{2(x^2+x+1)}$ cuando $x \in [0, 1]$.

207. Calcular el área encerrada por la curva $y = \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ y el eje de abcisas.
(Nota: Estudiar el dominio y el signo de la función.)

208. La curva que aparece en la figura de la derecha, llamada "astroide", viene dada por la ecuación

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



Hallar el área encerrada por la astroide.
(Nota: Se sugiere el cambio $x = a \operatorname{sen}^3 t$ ó $x = a\cos^3 t$.)

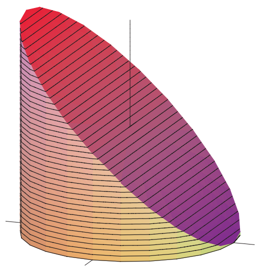
209. Calcular el área de la figura limitada por la curva $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

210. Calcular el área de la figura comprendida dentro de la curva $(\frac{x}{5})^2 + (\frac{y}{4})^{\frac{2}{3}} = 1$.

211. Comprobar usando la integración, que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$

212. Considerar el sólido V, expresado analíticamente como

$$V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2^2;\ 0 \leq z \leq 2 - y\right\}$$



y formado al cortar el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2^2$ por los planos $z = 0$ e $y + z = 2$. Describir y calcular el área de las secciones de V paralelas a cada uno de los planos coordenados.

213. Hallar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

214. Hallar el volumen encerrado por el paraboloide elíptico $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = x$ y limitado por el plano $x = 5$.

215. Hallar el volumen del elipsoide, engendrado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje $\mathtt{OX}$.

216. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje $\mathtt{OY}$, la parte de la parábola $y^2 = 12x$, que intercepta la recta $x = 3$.

217. La recta $x = 2$ divide al círculo $(x-1)^2 + y^2 \le 4$ en dos partes.

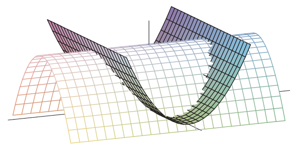
a) Calcular el volumen generado al girar alrededor de la recta $y = 0$ la parte de mayor área.
b) Calcular el volumen generado al girar alrededor de la recta $x = 0$ la parte de menor área.
c) Calcular el volumen generado al girar alrededor de la recta $x = 0$ la parte de mayor área.
d) Calcular el volumen generado al girar alrededor de la recta $x = 2$ la parte de mayor área.
e) Calcular el volumen generado al girar alrededor de la recta $x = 2$ la parte de menor área.

218. Hallar el volumen del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = h$.

219. Hallar el volumen del cono elíptico recto, cuya base es una elipse de semiejes a y b y cuya altura es igual a h.

220. Hallar el volumen del cuerpo limitado por los cilindros: $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

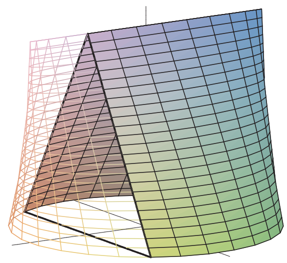
221. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2$ y $z = 1 - y^2$ (ver figura de la derecha) a partir de las áreas formadas al seccionar el cuerpo por planos paralelos al plano $z = 0$.



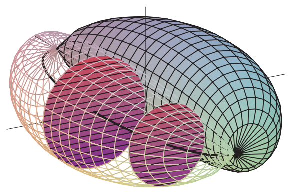
222. Calcular el volumen de cada una de las partes en que queda dividido un cilindro circular recto de radio 2 y de altura 8 por un plano que, conteniendo un diámetro de una de las bases, es tangente a la otra base.

223. Sobre las cuerdas de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$, paralelas al eje `OX`, se han construido unos cuadrados, cuyos lados son iguales a las longitudes de las cuerdas y los planos en que se encuentran son perpendiculares al plano `XY`. Hallar el volumen del cuerpo que forman estos cuadrados.

224. El plano de un triángulo móvil permanece perpendicular al diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es la cuerda correspondiente de dicho círculo, mientras que su vértice resbala por una recta paralela al diámetro fijo que se encuentra a una distancia h del plano del círculo. Hallar el volumen del cuerpo (llamado "conoide", ver figura aneja) engendrado por el movimiento de este triángulo desde un extremo del diámetro hasta el otro.



225. Un círculo deformable se desplaza paralelamente al plano `XZ` de tal forma, que uno de los puntos de su circunferencia descansa sobre el eje `OY` y el centro recorre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por el desplazamiento de dicho círculo.



226. Sea S el recinto del plano limitado por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje de abscisas. Para cada $p > 0$ consideramos los dos recintos en que la parábola $y = px^2$ divide a S,

$$A(p) = \{(x,y) \in S : y \ge px^2\} \quad \text{y} \quad B(p) = \{(x,y) \in S : y \le px^2\}.$$

a) Hallar p para que las áreas de $A(p)$ y $B(p)$ sean iguales.
b) Hallar p para que al girar $A(p)$ y $B(p)$ alrededor del eje de ordenadas obtengamos sólidos de igual volumen.

2.3.4 Integrales Impropias

227. Calcular el valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

228. Calcular $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ y $\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx$.

229. Estudiar el carácter de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2}dx$ y hallar $VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2}dx$.

230. Probar que $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

231. Probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$ no es convergente. ¿Existe $VP\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$?

232. Estudiar el carácter de las siguientes integrales, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

a) $\int_{a}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx$ b) $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$, para $a > 1$

233. Responder razonadamente, sobre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es continua y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

b) Si $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es derivable, creciente y acotada entonces $\int_a^\infty f'(x)dx$ converge.

c) Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{1000} f(x)dx \leq \int_a^\infty f(x)dx$.

d) Si $\int_a^\infty f(x) + g(x)\, dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ son convergentes.

e) Si $\int_{0^+}^1 f(x)dx$ y $\int_{0^+}^1 g(x)dx$ convergen, entonces $\int_{0^+}^1 f(x)g(x)dx$ converge necesariamente.

234. Probar que si f y g son funciones positivas tales que $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ convergen y existe, cuando $x \to \infty$, el límite de una de las funciones, entonces $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ converge.

235. Estudiar el carácter de las integrales siguientes:

a) $\int_0^\infty (2+\operatorname{sen} x)dx$	b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}dx$	c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$
d) $\int_1^\infty \frac{1}{\operatorname{ch} x}dx$	e) $\int_{-\infty}^0 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$	f) $\int_0^\infty e^{2x}(2x^2-4x)dx$
g) $\int_{-\infty}^0 e^{2x}(2x^2-4x)dx$	h) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$	i) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos x+e^x}dx$
j) $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$	k) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$	l) $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$
m) $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x dx$	n) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$	o) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\sqrt{x(1-x)}}dx$
p) $\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$	q) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$	r) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$

236. Estudiar el carácter de las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}dx$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^4-x^3-x^2+x}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}dx$ e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x+(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}$

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}dx$ h) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(x+1)dx$ i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+1}dx.$

237. Estudiar el carácter de las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\operatorname{tg} x)\operatorname{sen} x}{(\frac{\pi}{4}-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arcsen} x}{x^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}-x)^{\frac{3}{2}}}dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1}dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^3(x-1)}{x\ln^3 x}dx$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-e^{-x^2}}{x^2\cos x} - 1\right)dx$ h) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^{\frac{7}{2}}}dx$ i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\operatorname{arctg}^{\frac{1}{3}}(x-1)}{(x-1)^{\frac{2}{3}}\operatorname{sh} x}dx.$

238. Encontrar los valores de a, para que las integrales siguientes sean convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^a}dx$ b) $\displaystyle\int_2^\infty \left(\frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x^a}dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^a}dx$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{a}{x+1}\right)dx$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-a}\sqrt[3]{1-x^2}}$

g) $\displaystyle\int_0^\infty x^a\operatorname{sen} x dx$ h) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2-1}dx$ i) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{x^a}{x^4-1}dx$

239. Se define la función **gamma** por $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x}dx$.

a) Probar que está definida para todo $p > -1$ y se verifica que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
b) Calcular, usando a), $\Gamma(6)$.

240. Sea $f\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se define la función **transformada integral de Laplace** de la función f, que denotaremos por $\mathcal{L}\{f\}$, como $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$, siempre que la integral exista. Probar que:

a) Si $f(x) = 1$, $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$.
b) Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(x)\}$, entonces, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{\lambda f(x) + \mu g(x)\} = \lambda\mathcal{L}\{f(x)\} + \mu\mathcal{L}\{g(x)\}.$$

c) Si f es derivable y verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)e^{-sx} = 0$, a partir de un cierto s, y existe $\mathcal{L}\{f'(x)\}$, entonces

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0).$$

d) $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$ y que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(ax)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, usando la parte c).